# 等質空間上の確率場の表現について (等質空間における調和解析 II)



麻生, 泰弘

数理解析研究所講究録
262巻 1976年 1-15



# 等質空間上の確率場の表現について

島根大 文理　麻生泰弘

確率場(Random fields)の概念が，乱流の統計的解析にとって有効なことは，A.S. Monin & A.M. Yaglomの大著，Statistical Fluid Mechanics, MIT, 1971，及び同，vol. 2, MIT, 1975で十分に説明されている。他方，またP. Lévyは，彼のProcessus Stochastiques et Mouvement Brownien, 2 ed., 1965の第8章及びComplément第3章において，多次元パラメータをもつブラウン運動について述べている。

そして，我々は，定常過程については，そのスペクトル表現と，確率論的な性質との関わりの深い理論をもっているが，これから述べる確率場については未だ不十分であると思われる。以下，一つの試みと関連した興味ある結果について述べる。

## §1. 諸定義

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし，$S = G/K$ を等質空間とす

3. $\xi(s): \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ を可測関数として, $\{\xi(s); s \in S\}$ を等質空間 $S$ 上の確率場とよぼう.

$s_1, \ldots, s_k \in S$ と $E_1, \ldots, E_k \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ に対して,

$$\Phi(s_1, \ldots, s_k; E_1, \ldots, E_k) := P\{\xi(s_1) \in E_1, \ldots, \xi(s_k) \in E_k\}$$

定義1. 確率場 $\xi = \{\xi(s); s \in S\}$ が homogeneous であるとは, 任意の $s_1, \ldots, s_k \in S$ と $E_1, \ldots, E_k \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ に対して

$$(1) \quad \Phi(gs_1, \ldots, gs_k; E_1, \ldots, E_k) = \Phi(s_1, \ldots, s_k; E_1, \ldots, E_k) \quad , \text{for } \forall g \in G$$

のときをいい, (1) が, 任意の $k \in K$ について成立するとき, isotropic という.

上記の Yaglom - Monin では, $S = \mathbb{R}^d$ の場合について, 関数 $\Phi$ が translation な s - 不変のとき, homogeneous であるといって, $O(d)$ - 不変のとき, isotropic であると定義してある。さらに, $L^2(\Omega)$ を $P$ に関して2乗可積な関数のなすヒルベルト空間とし, その内積は,

$$(2) \quad (\xi, h) = \int \xi(\omega) \overline{h(\omega)} dP(\omega)$$

で定義される。 次の定義で, $(\xi(s), 1) = 0 \quad (s \in S)$ とする.

定義2. $\forall s \in S$ について, $\xi(s) \in L^2(\Omega)$ とする。このとき, $\quad (3) \quad \Gamma(s, t) := (\xi(s), \xi(t)) \quad , \quad s, t \in S.$

確率場 $\xi = \{\xi(s), s \in S\}$ が w-homogeneous (homogeneous in the wide sense) であるとは、任意の $g \in G$ と、任意の $s, t \in S$ について

(4) $\quad \Gamma(gs, gt) = \Gamma(s, t)$

が成立するときをいい、(4) が任意の $g \in K$ について成立するとき、w-isotropic (isotropic in the wide sense) という。

以下、我々は、$G$ を局所コンパクト群、$K$ をその閉部分群とし、確率場 $\xi$ は、$\forall s \in S = G/K$ について $\xi(s) \in L^2(\Omega)$ で、$(\xi(s), 1) = 0$ ($\forall s \in S$) をみたし、さらに、$s \to t$ in $S$ のとき、$\xi(s) \to \xi(t)$ in $L^2(\Omega)$ とする。このとき、(3) で定義される核関数 $\Gamma$ は、エルミート対称正値定符号核である。(注: 上の、任意の $s \in S$ について、$(\xi(s), 1) = 0$ なる条件は、本質的ではない。) 従って、この核の固有関数展開を行うことにより、我々は、確率場 $\xi$ に関するある程度の解析を行うことが出来るが、ここでは触れない。

## §2. w-homogeneous な確率場の表現と w-isotropic な確率場の表現

確率場 $\xi = \{\xi(s), s \in S\}$ によって生成されるヒルベル

ト空間を$\mathcal{H}$とする。すなわち，一次結合 $\sum_{i=1}^{n} c_i \xi(s_i)$ ，
$c_1, \dots, c_n$ は複素数，$s_1, \dots, s_n$ はSの点，たちのなす線形集合を，内積 $(\xi(s), \xi(t))$ $(s, t \in S)$ により完備化した~~素数~~空間を$\mathcal{H}$とし，可分であると仮定する。$\mathcal{H}$ $\xi(s)$ に対するGの作用を

$$(4) \qquad T(g)\xi(s) = \xi(g^{-1}s)$$

で与える。このとき，$\{T(g), \mathcal{H}\}$ が，群Gの表現であることは見易い。さらに，$s_0 = eK \in S$ とするとき，

$$T(k)\xi(s_0) = \xi(s_0), \quad \forall k \in K.$$

(1)さて，確率場 $\xi$ を w-homogeneous とするとき，任意の $g \in G$ と $s, t \in S$ とについて，

$$(T(g)\xi(s), T(g)\xi(t)) = (\xi(s), \xi(t))。$$

故に，このとき，表現 $\{T(g), \mathcal{H}\}$ は，ユニタリー表現であり，しかもクラス1の表現である（Kに関して）。逆に，表現 $\{T(g), \mathcal{H}\}$ が，かかる性質をもつとき，確率場 $\xi$ は，w-homogeneous である。Gel'fand & Raikov によれば，

$$(6) \qquad T(g) = \int_X T_x(g)\, d\mu(x)$$

と，既約成分の連続和に分解される。このとき，

$$\Gamma(t, s) = (\xi(t), \xi(s)) = (T(g_1)\xi(s_0), T(g_2)\xi(s_0))$$
$$= (T(g_2^{-1}g_1)\xi(s_0), \xi(s_0)) =$$

$$= \int_X (T_x(g_2^{-1}g_1) f_x(p_0), f_x(p_0))\, d\mu(x) \quad ,$$
$$(t = g_1^{-1} p_0, \quad s = g_2^{-1} p_0) \quad ,$$

すなわち，形式的に，$s = g p_0$ とするとき，

$$(6') \qquad f(s) = \int_X T_x(g^{-1}) f_x(p_0) \cdot d\mu(x)$$

$$(7) \quad \Gamma(t, s) = \int_X (T_x(g_2^{-1}g_1) f_x(p_0), f_x(p_0))\, d\mu(x) \ 。$$

このとき，関数 $\Gamma(t, s)$ は，$g_2^{-1} g_1$ のみに depend するので，改めて $s = g^{-1} p_0$ とするとき，$\Gamma(s, e) = \Gamma(g)$ とおいて $\Gamma(g)$ は，$G/K$ 上の $K$－左不変な関数であり，正値定符号。

Y. Asoo は，上記 $X$ として elementary positive definite fu. の集合をとり，A. M. Yaglom は，$G$ が separable な局所コンパクト，Type I gr. の場合について，$X$ として $G$ の dual をとり，(6′)，(7) の coordinate 表示を与えている。（Y. Asoo (1975)，A. M. Yaglom (1963)）。

我々の問題は，①如何なる形の連続和分解をとるか．

② 上記の表現 (6′)，(7) において $f(s)$，あるいは，$\Gamma(t, s)$ より測度 $\mu$ を定めること（形式的 inversion formula），

等が考えられるが，群 $G$ の表現 $\{T(g), \mathfrak{H}\}$ の数々の分類や標準的な性質をしらべることが必要か。

(ロ) 確率場 $f$ が w. isotropic のときは，もはや $\{T(g), \mathfrak{H}\}$

は，Gのユニタリー表現ではないが，Kに関しては，ユニタリーであり，さらにクラスⅠである。逆に，表現$\{T(g), g\in G\}$が，この性質をもつとき，確率場$\xi$は，w-isotropic である。従って，w-isotropic な確率場については，Gを局所コンパクト群，Kをその閉部分群として，Kに関してクラスⅠであるGの表現を扱うこととなる。このような，w-isotropic な確率場の興味深い例を，R. Gangolli (1967) に従って，次に述べる。

## §3. R. Gangolli による，P. Lévy の多次元パラメータブラウン運動の存在定理

P. Lévy は，(a) 任意の $a\in\mathbb{R}^d$ に対して，$(\xi(a),1)=0$，かつ，任意の $a, b\in\mathbb{R}^d$ に対して

(8) $(\xi(a),\xi(b)) = \frac{1}{2}(|a|+|b|-|a-b|)$ をみたすガウス過程$\{\xi(a), a\in\mathbb{R}^d\}$（これを le mouvement brownien à plusieurs paramètres と呼ぶ），および (b) 任意の $a\in S^d$ に対して，$(\xi(a),1)=0$，かつ任意の $a, b\in S^d$ に対して

(9) $(\xi(a),\xi(b)) = \frac{1}{2}(d(a,o)+d(b,o)-d(a,b))$ をみたすガウス過程$\{\xi(a), a\in S^d\}$（これを la fonction brownienne sur la sphère $S^d$ と呼ぶ）を考察している

。(8)および(9)は，それぞれ，$R^d$ ~~および~~ $= M(d)/SO(d)$ および $S^d = SO(d+1)/SO(d)$ 上の正値定符号核であり，$SO(d)$-不変である。すなわち，我々の定義2にいう w.isotropic な実確率場の例である。ブラウン運動は，確率論的に重要な概念であるとともに，解析学的にも興味深い性質を数々もっているが，これらについては，例えば，飛田"ブラウン運動"をみてもらうことにして，ここでは，その存在に関するR. Gangolli の結果についてのみ述べる。$G$を第二可算公理をみたす局所コンパクト群，$K$をその閉部分群とする。また$S=G/K$は，等質空間である。さて，確率場$\{f(s),\ s\in S\}$は実数値をとるものとするとき，これが$S$上のガウス場であるとは，任意の実数 $\theta_1, \dots, \theta_n$ と $s_1, \dots, s_n \in S$ に対して，

$$(10)\quad \left\langle \exp\left\{\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{n}\theta_i f(s_i)\right\}, 1\right\rangle = \exp\left\{\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{n}\theta_i m(s_i) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_i\theta_j \Gamma(s_i, s_j)\right\}$$

をみたす$S$上の(実)関数 $m(s)$ と，正値定符号核 $\Gamma(t,s)$ $(t, s\in S)$ が存在することをいう。~~特に~~，このとき，必要ならば，$f(s)-m(s)$ $(\forall s\in S)$ を考えることにより，$m(s)\equiv 0$ $(\forall s \in S)$ としてよい。以下，$m(s)=(f(s),1)\equiv 0$ とする。~~すると~~，$(f(s), f(t)) = \Gamma(s,t)$ となる。

定義3： $S$上の核 $\Gamma(s,t)$ が，Lévy-Schönberg 核

(以下, 略してL-S核という)であるとは, 次の諸条件をみたすときをいう;

(i) $\Gamma(s,t) = \Gamma(t,s) \quad (s,t \in S)$

(ii) $\Gamma(s,s_0) = 0 \quad (s_0 = eK), \ \forall s \in S$

(iii) $\forall g \in G$ に対して,

$$\Gamma(gs,gs) + \Gamma(gt,gt) - 2\Gamma(gs,gt) = \Gamma(s,s) + \Gamma(t,t) - 2\Gamma(s,t), \quad s,t \in S$$

(iv) $\Gamma(s,t)$ : positive definite.

定義4: $\Gamma(s,t)$を, S上のL-S核とするとき, S上のガウス場$\{f(s), s \in S\}$が, S上のブラウン運動であるとは, 任意の$s,t \in S$に対して,

(11) $(f(s), f(t)) = \Gamma(s,t)$

がみたされるときをいう.

まず, $K(s,t) = \Gamma(s,s) + \Gamma(t,t) - 2\Gamma(s,t)$ とおくと, $\Gamma$がL-S核のとき, $K(s,s_0) = \Gamma(s,s)$, $K(t,s_0) = \Gamma(t,t)$ より,

$$2\Gamma(s,t) = K(s,s_0) + K(t,s_0) - K(s,t).$$

このとき, 任意の$k \in K$に対して,

$$2(f(ks), f(kt)) = 2\Gamma(ks,kt) = 2\Gamma(s,t) = 2(f(s),f(t))$$

従って，S上のブラウン運動は，w-isotropicな（実）確率場である。（注：実は，isotropicな確率場である）

問題：等質空間$S=G/K$上のL-S核を決定せよ。

Gangolliは，（イ）G：連結局所コンパクト・アーベル群，K：Gの任意の閉部分群，（ロ）$G=M(d)$，$K=SO(d)$（ハ）G：連結コンパクト・半単純リー群，K：$S=G/K$がコンパクトな対称空間となるGの任意の閉部分群，（ニ）G：中心がfiniteであるnoncompact，連結半単純リー群，K：Gの極大コンパクト部分群の場合について，この問題を解いた。

Lemma；等質空間$S=G/K$上の，$\Gamma(s_0,s_0)=0$ $(s_0=eK)$なる対称核がL-S核であるための必要十分条件は，

（a）任意の$g\in G$に対して，$K(gs,gt)=K(s,t)$，

（b）任意の$\varepsilon\geqq 0$に対して，

$$\theta_\varepsilon(s,t):=\exp\{-\varepsilon K(s,t)\}\ \text{positive def.}$$

をみたすことである。

このとき，任意の$k_1,k_2\in K$に対して，

$$\theta_\varepsilon(k_1 g k_2\cdot s_0,s_0)=\exp\{-\varepsilon K(k_1 g k_2\cdot s_0,s_0)\}$$
$$=\exp\{-\varepsilon K(gs_0,s_0)\}=\theta_\varepsilon(gs_0,s_0)$$

$$\theta_\varepsilon(e\cdot s_0,s_0)=1,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\theta_\varepsilon(g\cdot s_0,s_0)=1\quad (g\in G)$$

すなわち，$\theta_\varepsilon(gs_0, s_0)$ は，normalized zonal spherical fn. である。また，群G上の関数族 $h_\varepsilon(g)$ $(\varepsilon \geq 0)$ が imbeddable であるとは，$\forall \varepsilon$ に対して $h_\varepsilon$ が pos. def. であり，$\lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon = 1$ をみたすときをいう。さらに，G上の関数 $h$ が無限分解可能であるとは，$h$ が pos. def. であり，$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して，$h(g) = h_n(g)^n$ なる pos. def. な関数 $h_n$ が存在するときをいう。

以下，$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G)$ を，G上の複素数値，連続，normalized zonal spherical，無限分解可能な関数の class とする。

(イ) G：連結局所コンパクト・アーベル群

K：Gの任意の閉部分群　　　の場合

定理： G上の関数 $\theta$ に対して，$\theta^*(gK) = \theta(g)$ により，S上の関数 $\theta^*(s)$ $(s = gK)$ を定義するとき，$\theta \in \mathfrak{R}$ で実数値をとるための条件は，$\theta^*$ が

$$(12) \quad \theta^*(s) = \exp\{-[\varphi(s) + \int_{\hat{S} \setminus \{e\}} (1 - \chi(s))\, d\mu(\chi)]\},$$

と表現されることである。ここに，$\varphi$ は，

$$(13) \quad \frac{1}{2}(\varphi(s+t) - \varphi(s-t)) = \varphi(s) + \varphi(t)$$

の連続な，nonnegative sol. であり，$\mu$ は，dual $\hat{S}$ 上の対称な pos. meas. であり，$e \in \hat{S}$ の任意の近傍~~[illegible]~~の補集合に finite mass をもち，

(14) $\displaystyle\int_{\hat{S}\setminus\{e\}}(1-\mathrm{Re}\,\chi(s))\,d\mu<+\infty,\ \forall s\in S$

をみたす。さらに，$\varphi$，$\mu$ は，$\theta^*$ により unique に決定される。

このとき，

$$K(s,s_0):=\varphi(s)+\int_{\hat{S}\setminus\{e\}}(1-\chi(s))\,d\mu(\chi),\ \forall s\in S.$$

とおくならば，

$$2\Gamma(s,t)=K(s,s_0)+K(t,s_0)-K(s-t,s_0)$$

はL-S 核である。

(ロ) $G=M(d)$，$K=SO(d)$ の場合　($d\geq 2$)

~~$S=G/K$ の関数 $\theta$ に対して $\theta^*(g):=\theta(gK)$，$g\in G$~~

$G$ 上の関数 $\theta$ が，$\mathcal{L}$ に属するとき，対応する $S=G/K$ 上の関数 $\theta^*$ は，$\mathbb{R}^d$ 上の radial fn. であるが，

定理：$G$ 上の関数 $\theta$ が，$\mathcal{L}$ に属するための条件は，

$$(15)\quad \theta^*(s)=\exp\left\{-\left[c|s|^2+\int_{0+}^{\infty}(1-Y_d(\lambda|s|))\,d\mu(\lambda)\right]\right\}$$
$$(c\geq 0)$$

と表現されることである。ここに，

$$Y_d(t)=\frac{1}{B(\frac{1}{2},\frac{d-1}{2})}\int_0^{\pi}e^{\sqrt{-1}\,t\cos\theta}\sin^{d-2}\theta\,d\theta\quad(t\geq 0)$$

であり，$\mu$ は，$[0,\infty)$ 上の pos. measure で，

$$\int_{0+}^{\infty} \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\, d\mu(\lambda) < +\infty$$

をみたす。さらに，$c$ と $\nu$ とは，$\theta^*$ により unique に決定される。

このとき，

$$K(s, s_0) = c|s|^2 + \int_{0+}^{\infty} (1 - Y_\alpha(\lambda|s|))\, d\mu(\lambda)$$

とおくと，

$$2P(s,t) = K(s, s_0) + K(t, s_0) - K(s-t, s_0)$$

は，L-S 核である。

特に興味あるのは，$c = 0$ の場合に，$d\mu_\alpha(\lambda) = \dfrac{d\lambda}{\lambda^{\alpha+1}}$ $(0<\alpha<2)$ ととると，$K_\alpha(s, s_0) = |s|^\alpha$ となる。

(ハ) $S = G/K$：コンパクトな対称空間 の場合

定理：$G$ 上の関数 $\theta$ が，$\mathfrak{X}$ に属するための必要十分条件は，

$$(16) \qquad \theta(g) = \exp\left\{-\sum_{n=0}^{\infty} a_n (1 - \varphi_n(g))\right\}$$

と表現されることである。ここに，$\{\varphi_n(g)\}_{n=0}^{\infty}$ は，normalized, pos. def. zonal spherical fn.，すなわち，$\varphi_n(g) = \int_K \chi_n(g^{-1}k)\, dk$，$a_n \geq 0$ は，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$ をみたし，$\theta$ により unique に決定される

. involution $\iota$ を $\iota(\varphi_n) = \overline{\varphi}_n$ で定義するとき，$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を，$a_n \geq 0$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$ かつ $\iota(a_n) = a_n$ $(\forall n \geq 0)$ をみたすようにとり，$K(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1 - \varphi_n($

$g_2^{-1}g_1)$) ($s=g_1K$, $t=g_2K$) ととると，

$$2P(s,t)=K(s,s_0)+K(t,s_0)-K(s,t)$$

は，L-S 核である。

(二) $S=G/K$ ; noncompact な対称空間の場合

$\mathfrak{M}$ を，elementary pos. def. zonal spherical fn. の集合とする。

定理： G上の関数 $\theta$ が，$\mathcal{L}$ に属するための条件は，

(17) $\overset{*}{\theta}(s)=\exp\{-[\gamma(s)+\int_{\mathfrak{M}\setminus\{1\}}(1-\phi(x))\,d\mu(\phi)]\}$

と表現されることである。ここに，

(a) $\mu$ は，$\mathfrak{M}\setminus\{1\}$ 上の pos. meas. で，

$\mu(A)=\mu(\iota(A))$ をみたし，

(b) $e\in G$ の任意のコンパクトな近傍に対して，

$$I_U(\phi)=\int_U(1-\mathcal{R}e\,\phi(x))\,dx$$

とするとき，$\int_{\mathfrak{M}\setminus\{1\}}I_U(\phi)\,d\mu(\phi)<+\infty$，

(c) $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ を，$U_n\downarrow\{1\}$ なる，$1\in\mathfrak{M}$ のコンパクトな近傍列とするとき，Support$(\mu_n)=U_n$ なる finite meas. の seq. $\{\mu_n\}$ が存在して，

$$\gamma(s)=\lim_n\int_{U_n}(1-\mathcal{R}e\,\phi(s))\,d\mu_n。$$

$\gamma$，$\mu$ は，$\theta^*$ により unique に決定される。関数 $\gamma$ を，$\theta^*$ により決定されるガウス関数，$\mu$ を $\theta^*$ により決定される Lévy 測度という。

関数$\gamma$の形を，はっきりさせるには，$1\in\mathfrak{M}$ の近くの$\mathfrak{M}$の細い構造をしることが必要であり，補系列の表現が関連することが指摘されている。

例： $G=SL(2;\mathbb{R})$, $K=SO(2)$ のとき

$$\gamma(x) = c\log(\cosh\rho(x,o)/2) \quad (c\geq 0).$$

いま，$\psi(x) = \gamma(x) + \int_{\mathfrak{M}\setminus\{1\}}(1-\phi(x))\,d\mu(\phi)$
とおき，$K(g_1K, g_2K) = \psi(g_2^{-1}g_1)$ ととると，

$$2P(s,t) = K(s,s_0) + K(t,s_0) - K(s,t)$$

は，L-S 核である。

例： $G=SL(2;\mathbb{R})$, $K=SO(2)$ のとき

$$2P(s,t) = (\log\cosh\rho(s,s_0)/2)^{1/2} + (\log\cosh\rho(t,s_0)/2)^{1/2} - (\log\cosh\rho(s,t)/2)^{1/2}$$

は，L-S 核である。

## 文献

(1) Y. Asoo (1975): On Random Fields on Homogeneous Space, Mem. Fac. Lit & Sci., Shimane Univ., Nat. Sci. 8, pp. 25-29.

(2) R. Gangolli (1967): Abstract Harmonic Analysis

and Lévy's Brownian Motion of Several Parameters, 5 th Berkeley Symp. Prob. Stat., Vol. 2- Part 1, pp. 13-30.

(3) A. M. Yaglom (1963): Second-Order Homogeneous Random Fields, 4 th Berkeley Symp. Prob. Stat., Vol. 2, pp. 593-622.